Fixe und variable Kosten

$x = Outputmenge\ (Ausbringungsmenge, \mathrm{Pr}oduktionsmenge)$

$K = Gesamtkosten$

$K_f = Fixkosten$

$K_v = \mathrm{var}iable\ Kosten$

$k = Stückkosten\,(Durchschnittskosten)$

$k_f = fixeStückkosten$

$k_v = \mathrm{var}iabke\ Stückkosten$

$K' = Grenzkosten$

Die Gesamtkosten sind die Summe aus fixen und variablen Kosten:

$$K = K_f + K_v$$

Dividiert man die Gesamtkosten durch die Ausbringungsmenge (produzierte Stückzahl), so erhält man die Stückkosten (= Durchschnittskosten):

$$k = \frac{K}{x}$$

Die gesamten Stückkosten ergeben sich auch aus der Summe von fixen und variablen Stückkosten:

$$k = k_f + k_v$$

Dividiert man die gesamten Fixkosten durch die Ausbringungsmenge, so erhält man die fixen Stückkosten:

$$k_f = \frac{K_f}{x}$$

Dividiert man die gesamten variablen Kosten durch die Ausbringungsmenge, so erhält man die variablen Stückkosten:

$$k_v = \frac{K_v}{x}$$

Multipliziert man beide Seiten der letzten Gleichung mit x, so erhält man:

$$K_v = k_v * x$$

In der Gleichung

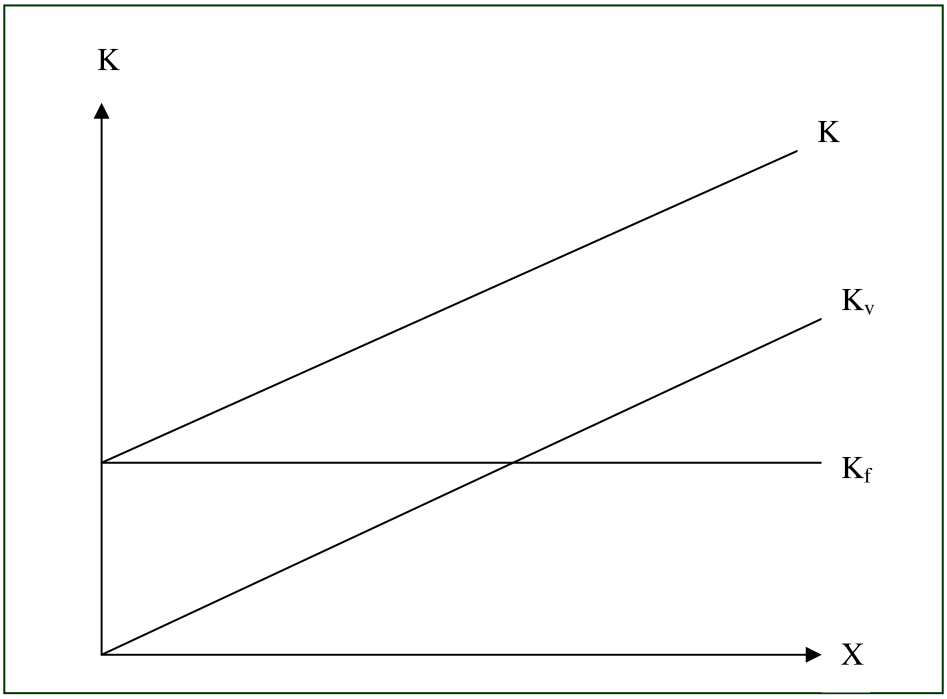
$$K = K_f + K_v$$

lässt sich nun das K_v durch k_v * x ersetzen und man erhält die sogenannte lineare Kostenfunktion (linear, weil die Kostenfunktion eine Gerade ist):

$$K = K_f + k_v * x$$

Bei einer linearen Kostenfunktion wird unterstellt, dass die variablen Stückkosten (k_v) konstant sind, d. h. sie bleiben unabhängig von der Ausbringungsmenge immer gleich.

Grafische Darstellung einer linearen Kostenfunktion:



Bei linearer Kostenfunktion steigen die variablen Kosten K_v proportional zur Ausbringungsmenge. Wenn die Ausbringungsmenge beispielsweise um 10 % steigt, dann steigen auch die variablen Kosten um 10 %.

Bei linearer Kostenfunktion ist die Steigung der Funktion (Grenzkosten = K´) immer gleich den variablen Stückkosten:

$$K' = k_v$$

Beispiel zur linearen Kostenfunktion:

$K = 1.000 + 2x$

Wenn für einen Produktionsprozess diese Kostenfunktion gilt, so bedeutet dies: Die Fixkosten des Produktionsprozesses belaufen sich auf 1.000 € und die variablen Stückkosten auf 2 €. Nun lassen sich für jede beliebige Outputmenge x die zugehörigen Gesamtkosten rechnerisch ermitteln, indem für x die jeweilige Outputmenge in die Kostenfunktion eingesetzt wird:

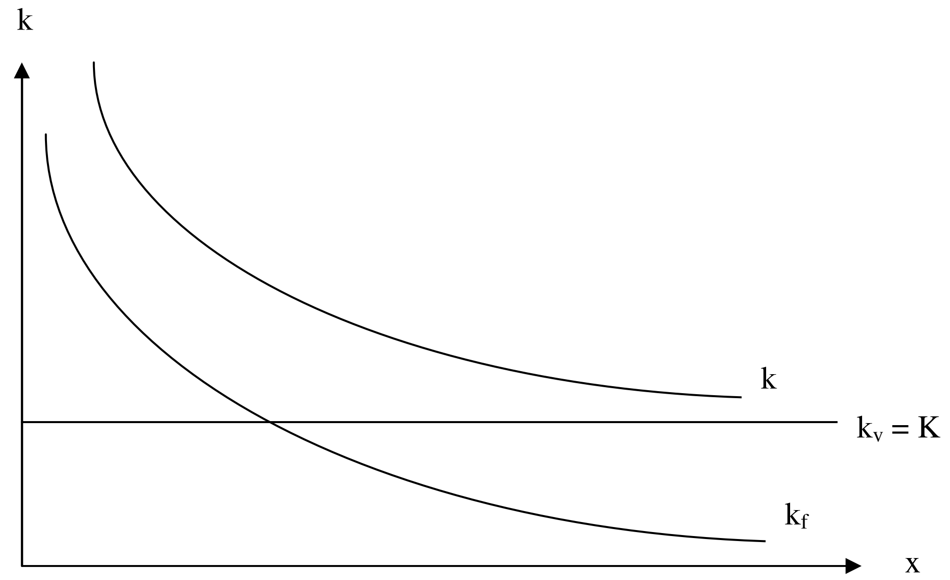
Wenn z. B. 5.000 Outputeinheiten hergestellt werden, betragen die Gesamtkosten:

$K = 1.000 + 2 * 5.000 = 11.000€$

Wenn die Kostenfunktion bekannt ist, dann lassen sich die Stückkosten auch folgendermaßen ermitteln:

$$k = \frac{K_f + k_v * x}{x}$$

Grafische Darstellung der Stückkostenverläufe bei linearer Kostenfunktion:

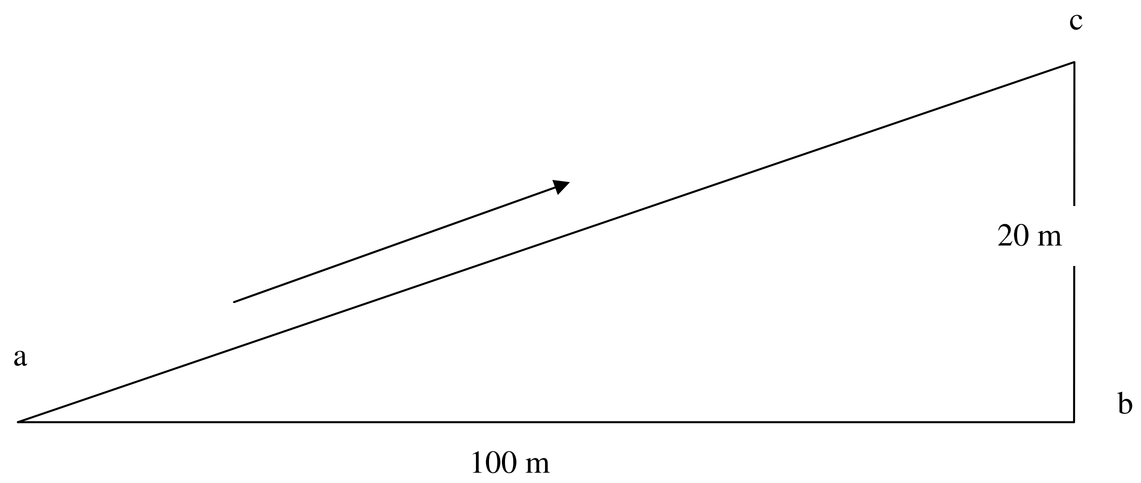


Nimmt bei einer linearen Kostenfunktion die Ausbringungsmenge zu, so

- sinken die fixen Stückkosten
- bleiben die variablen Stückkosten konstant
- sinken die gesamten Stückkosten

Verschiedene Kostenverläufe, Stückkosten und Grenzkosten

Bevor man sich mit Stück- und Grenzkostenverläufen beschäftigt ist es hilfreich, sich die Berechnung von Steigungen vor Augen zu führen:



Stellen Sie sich vor, ein Wanderer bewegt sich vom Punkt a zum Punkt c unserer Grafik. Ist er am Punkt c angelangt, so hat er sich sowohl 100 m in horizontaler wie auch 20 m in vertikaler Richtung bewegt. Er hat auf seinem Weg von a nach c eine Steigung von

$$\frac{20m}{100m} = 0,2$$

oder 20 % bewältigt.

Mit anderen Worten: Hat sich der Wanderer einen Meter in horizontaler Richtung voran bewegt, so hat er gleichzeitig 0,2 m an Höhe gewonnen.

Ist die vom Wanderer zurückgelegte Strecke eine Gerade, ist die Berechnung der Steigung dieser Geraden vergleichsweise einfach. Leider gibt es aber auch Strecken, die nicht gerade, nicht linear, sondern gekrümmt verlaufen. Auch diese Strecken haben eine Steigung,

a. Lineare Kostenfunktion

Würde es sich bei der Strecke a-b nicht um Meter, sondern um Outputeinheiten und bei b-c nicht um Meter, sondern um Kosten handeln, so ließe sich die Steigung der Strecke a-c in gleicher Weise bestimmen, indem man die Kosten von 20 € durch die Anzahl der Outputeinheiten von 100 dividiert:

$$\frac{K}{x} = \frac{20€}{100x} = 0{,}2€/x$$

Pro Outputeinheit steigen die Kosten also um 0,2 €.

Durch den gleichen Rechengang werden jedoch auch die Stückkosten bestimmt, denn es gilt:

$$k = \frac{K}{x} = \frac{20€}{100x} = 0{,}2€/x$$

Also ist die Steigung der Geraden (diese entspricht den Grenzkosten) gleich den Stückkosten!

In dem soeben dargestellten Beispiel existieren allerdings keine Fixkosten, sämtliche Kosten sind variabel.

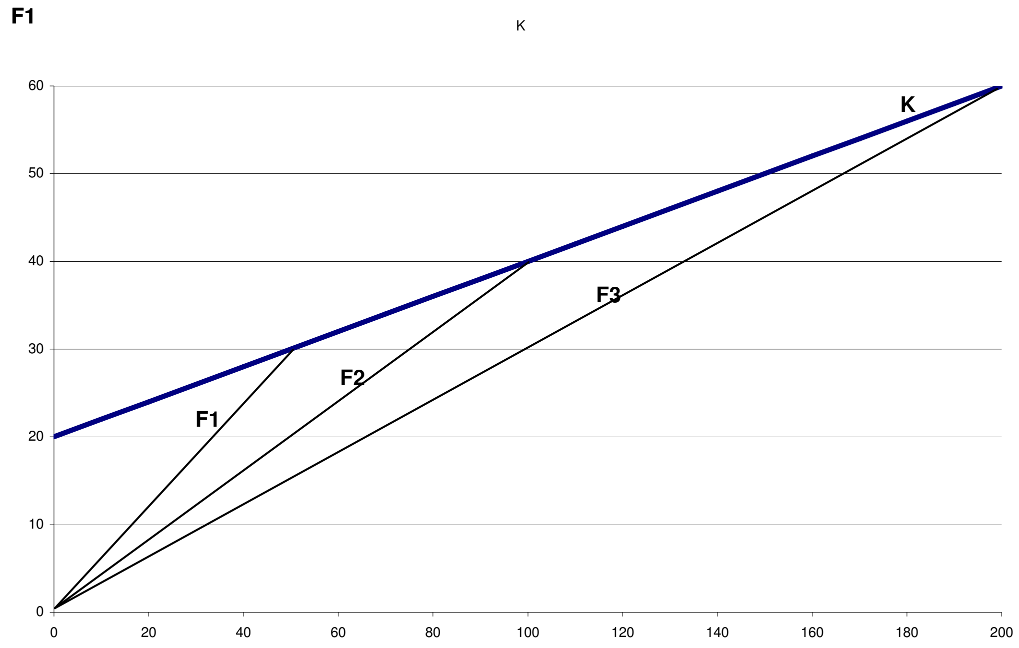
Betrachten wir nun eine lineare Kostenfunktion, die auch Fixkosten enthält, z. B.:

$$K = 20 + 0{,}2x$$

Die Funktion als Wertetabelle:

x	K	k	kf	kv	K´
0	20	-	-	-	-
10	22	2,200	2,000	0,20	0,20
20	24	1,200	1,000	0,20	0,20
30	26	0,867	0,667	0,20	0,20
40	28	0,700	0,500	0,20	0,20
50	30	0,600	0,400	0,20	0,20
60	32	0,533	0,333	0,20	0,20
70	34	0,486	0,286	0,20	0,20
80	36	0,450	0,250	0,20	0,20
90	38	0,422	0,222	0,20	0,20
100	40	0,400	0,200	0,20	0,20
110	42	0,382	0,182	0,20	0,20
120	44	0,367	0,167	0,20	0,20
130	46	0,354	0,154	0,20	0,20
140	48	0,343	0,143	0,20	0,20
150	50	0,333	0,133	0,20	0,20
160	52	0,325	0,125	0,20	0,20
170	54	0,318	0,118	0,20	0,20
180	56	0,311	0,111	0,20	0,20
190	58	0,305	0,105	0,20	0,20
200	60	0,300	0,100	0,20	0,20

Graphische Darstellung dieser Kostenfunktion:



In der Grafik sind drei Fahrstrahle F1, F2 und F3 eingezeichnet. Als Fahrstrahl bezeichnet man jede lineare Verbindung zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems und dem Grafen der Funktion.

Die Steigung des Fahrstrahls F1 lässt sich ermitteln, indem man die zugehörige Kostenhöhe (30) durch die zugehörige Outputmenge (50) dividiert. Als Ergebnis erhält man 0,6. Wenn die Steigung des Fahrstrahls F1 0,6 beträgt, so betragen die Stückkosten ebenfalls 0,6.

Die Steigung des Fahrstrahls F2 lässt sich ermitteln, indem man die zugehörige Kostenhöhe (40) durch die zugehörige Outputmenge (100) dividiert. Als Ergebnis erhält man 0,4. Wenn die Steigung des Fahrstrahls F3 0,4 beträgt, so betragen die Stückkosten ebenfalls 0,4.

Die Steigung des Fahrstrahls F3 lässt sich ermitteln, indem man die zugehörige Kostenhöhe (60) durch die zugehörige Outputmenge (200) dividiert. Als Ergebnis erhält man 0,3. Wenn die Steigung des Fahrstrahls F3 0,3 beträgt, so betragen die Stückkosten ebenfalls 0,3.

Wie man sieht, nimmt die Steigung der Fahrstrahle mit zunehmender Outputmenge ab. Also sinken bei linearer Kostenfunktion auch die Stückkosten bei zunehmender Outputmenge.

Betrachten wir nun die Steigung der Gesamtkosten: Wenn 0 Outputeinheiten hergestellt werden, betragen die Gesamtkosten 20, bei 200 Outputeinheiten betragen die Gesamtkosten 60. Eine Erhöhung der Ausbringungsmenge um 200 Einheiten führt zu einer Kostensteigerung von 40. Die Steigung der linearen Kostenfunktion beträgt also:

$$\frac{40€}{200x} = 0{,}2€ / x$$

Die Steigung der Kostenfunktion (= Grenzkosten) beträgt 0,2. Diese Steigung wurde berechnet, indem die variablen Kosten durch die Outputmenge dividiert wurden. Diese Division führt aber ebenfalls zu den variablen Stückkosten, da gilt:

$$\frac{K_v}{x} = k_v$$

Also sind bei linearer Kostenfunktion die Grenzkosten gleich den variablen Stückkosten. Bei linearer Kostenfunktion gilt also:

$$K' = k_v$$

a. Der degressive Verlauf der Kostenfunktion

Ein degressiver Kostenverlauf liegt vor, wenn die Gesamtkosten mit abnehmenden Zuwachsraten steigen.

Die folgende Funktionsgleichung beschreibt einen degressiven Kostenverlauf:

(wird später detailliert dargestellt)

b. Der progressive Verlauf der Kostenfunktion

Ein progressiver Kostenverlauf liegt vor, wenn die Gesamtkosten mit zunehmenden Zuwachsraten steigen.

Die folgende Funktionsgleichung beschreibt einen progressiven Kostenverlauf:

$$K = 30.720 + 30x^3$$

Hieraus ergib sich die folgende Stückkostenfunktion:

$$k = \frac{K}{x} = \frac{30.720 + 30^3}{x} = \frac{30720}{x} + 30x^2$$

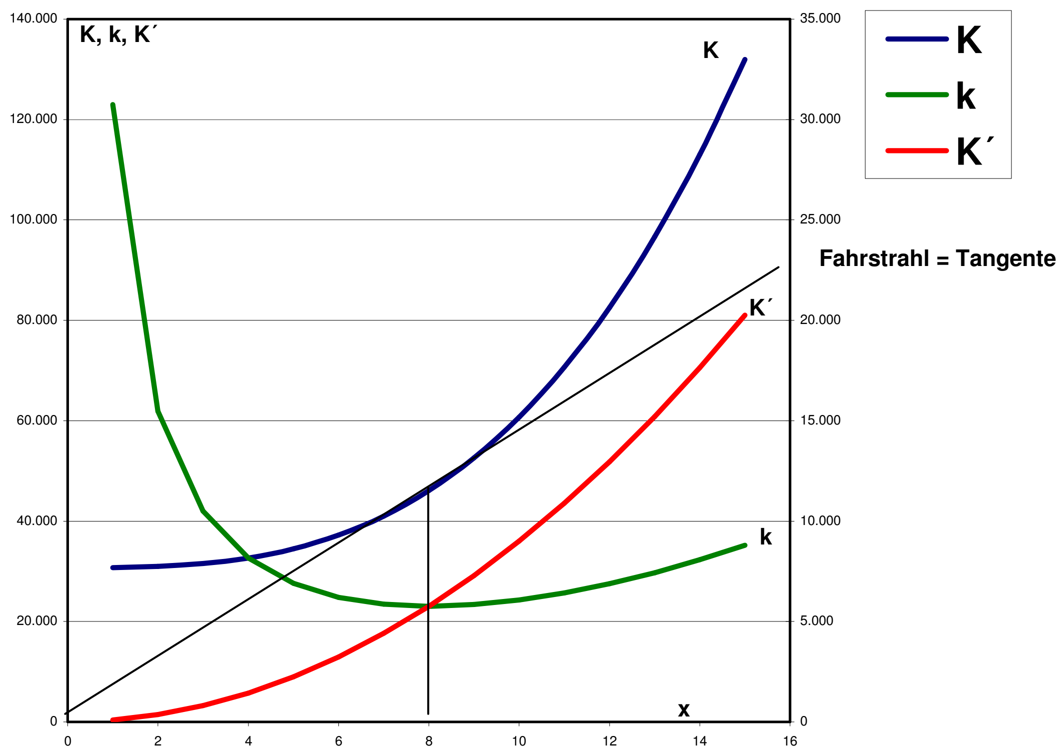
Nun ist noch die Steigung der Kostenfunktion zu ermitteln. Da es sich bei der progressiven Kostenfunktion nicht um eine Gerade handelt, hat diese Funktion auch in jedem Punkt eine andere Steigung. Die Mathematiker ermitteln die Steigung einer Funktion, indem sie die sogenannte erste Ableitung der Funktion bilden. Die Bildung der ersten Ableitung setzt Kenntnisse auf dem Gebiet der Differentialrechnung voraus, die hier nicht vermittelt werden können. Wir glauben also den Mathematikern, dass die erste Ableitung zu unserer progressiven Kostenfunktion folgendermaßen lautet:

$$K' = 90x^2$$

Tabellarische Darstellung der Kostenfunktionen:

x	K	k	K´
0	30.720	-	-
1	30.750	30.750	90
2	30.960	15.480	360
3	31.530	10.510	810
4	32.640	8.160	1440
5	34.470	6.894	2250
6	37.200	6.200	3240
7	41.010	5.859	4410
8	46.080	5.760	5760
9	52.590	5.843	7290
10	60.720	6.072	9000
11	70.650	6.423	10890
12	82.560	6.880	12960
13	96.630	7.433	15210
14	113.040	8.074	17640
15	131.970	8.798	20250

Grafische Darstellung der Kostenverläufe:



Das Minimum der Stückkosten liegt bei der Ausbringungsmenge, bei der der Fahrstrahl an die Kostenfunktion gleichzeitig zur Tangente an die Kostenfunktion wird. Von allen Fahrstrahlen, die sich an diese Kostenfunktion zeichnen lassen, hat dieser die geringste Steigung, also sind hier die Stückkosten am geringsten.

Die Steigung einer Funktion lässt sich bestimmen, indem man die Steigung der Tangente an einen beliebigen Punkt der Funktion berechnet. Die Steigung des Fahrstrahls, der die Kostenfunktion gerade noch tangiert, entspricht also sowohl den Stückkosten wie auch der Steigung der Funktion in diesem Tangentialpunkt, also den Grenzkosten. Die Ausbringungsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind, lässt sich nun mathematisch auf zweierlei Weise bestimmen:

1. Möglichkeit:

Man sucht die Ausbringungsmenge, bei der die Stückkosten gleich den Grenzkosten sind:

$$k = K'$$

$$\frac{30.720}{x} + 30x^2 = 90x^2$$

$$\frac{30.720}{x} = 60x^2$$

$$30.720 = 60x^3$$

$$512 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{512}$$

$$x = 8$$

Bei einer Ausbringungsmenge von 8 schneiden sich Grenz- und Stückkostenfunktion, also liegt dort das Minimum der Stückkosten.

2. Möglichkeit:

Man sucht die Ausbringungsmenge, bei der die Steigung der Stückkostenfunktion gleich Null ist:

Dort, wo die Stückkostenfunktion ihr Minimum hat, ist die Steigung der Stückkostenfunktion gleich null. Die erste Ableitung der Stückkostenfunktion hat also dort eine Nullstelle. Um das Minimum der Stückkosten zu bestimmen, kann man die erste Ableitung der Stückkostenfunktion Null setzten:

$$k = \frac{30.720}{x} + 30x^2$$

$$k = 30.720x^{-1} + 30x^2$$

$$k' = -30.720x^{-2} + 60x$$

$$0 = -\frac{30.720}{x^2} + 60x$$

$$\frac{30.720}{x^2} = 60x$$

$$30.720 = 60x^3$$

$$512 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{512}$$

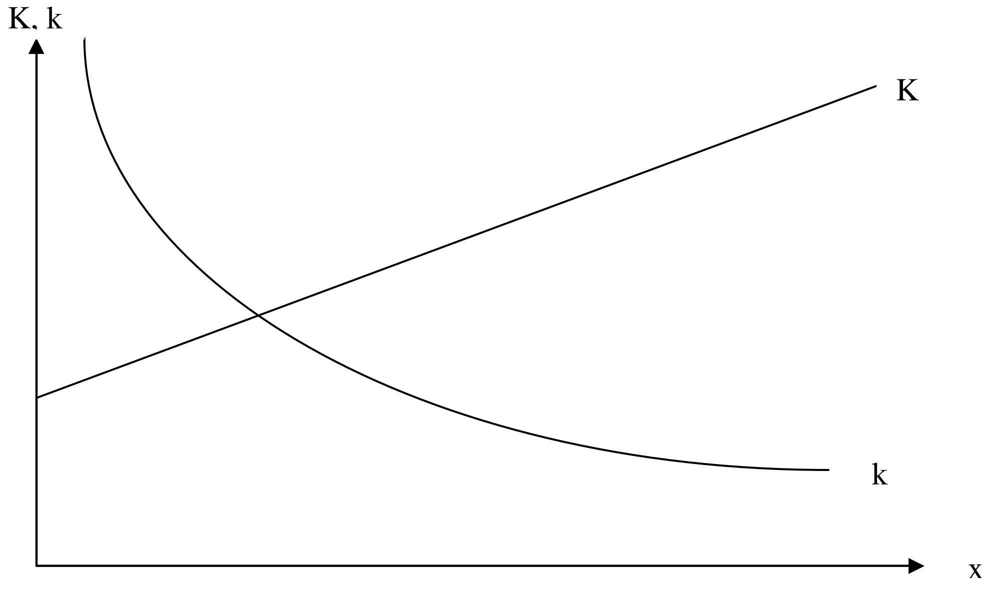
$$x = 8$$

Das Minimum der Stückkosten liegt bei einer Ausbringungsmenge von 8 Einheiten.

Betriebsoptimum

Das Betriebsoptimum liegt bei der Ausbringungsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind.

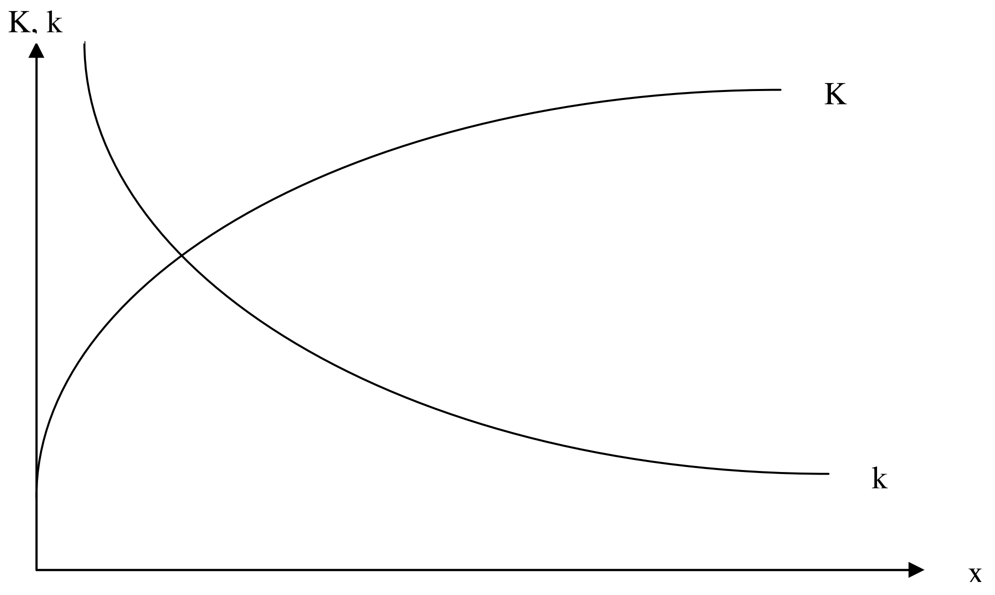
Linearer Kostenverlauf:



Die Funktion der Stückkosten sinkt kontinuierlich, mathematisch gesehen liegt ihr Minimum im Unendlichen. Betriebswirtschaftlich gesehen erreichen die Stückkosten jedoch an der Kapazitätsgrenze ihr Minimum.

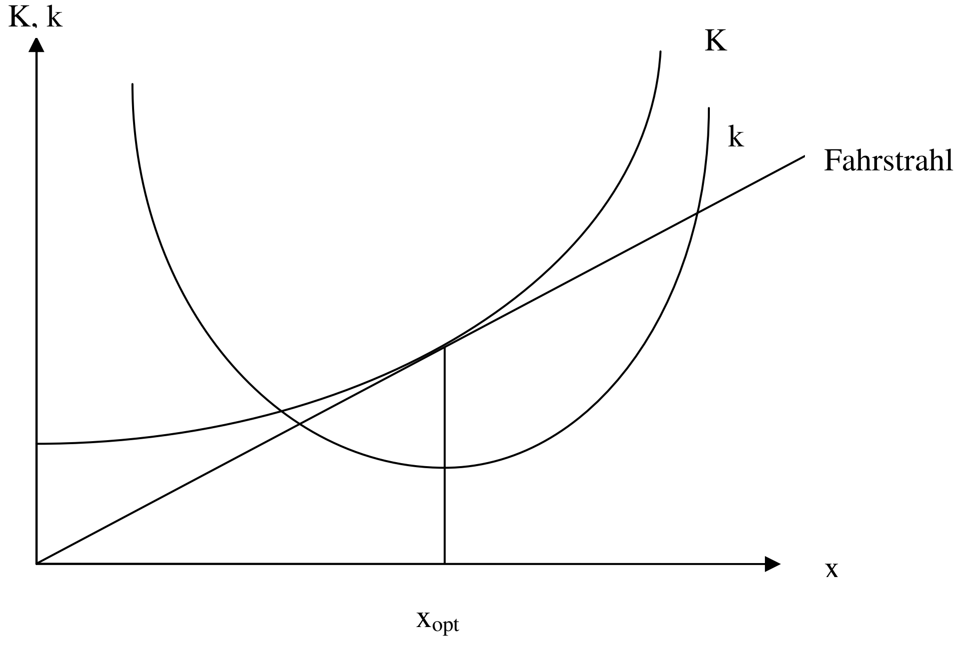
Also liegt bei linearem Kostenverlauf das Betriebsoptimum an der Kapazitätsgrenze.

Degressiver Kostenverlauf:



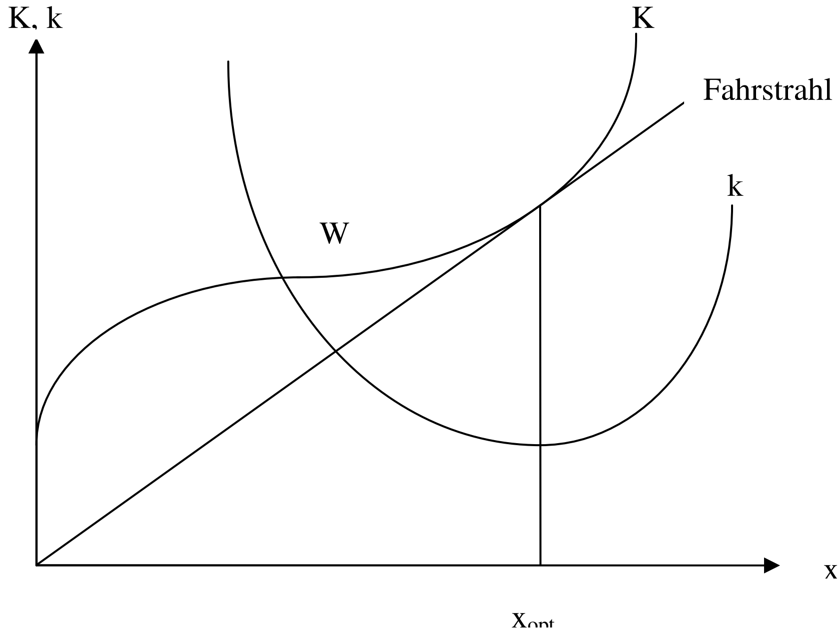
Da auch hier die Stückkosten kontinuierlich sinken, liegt bei degressivem Kostenverlauf das Betriebsoptimum ebenfalls an der Kapazitätsgrenze.

Progressiver Kostenverlauf:



Bei progressiver Kostenfunktion sinken die Stückkosten zunächst, um dann ab einer bestimmten Ausbringungsmenge (x_{opt}) anzusteigen.

Ertragsgesetzlicher Kostenverlauf:



Grafische Ermittlung des Betriebsoptimums bei progressivem und ertragsgesetzlichem Kostenverlauf:

Bei progressivem und ertragsgesetzlichem Kostenverlauf ermittelt man das Betriebsoptimum, indem man den Fahrstrahl zeichnet, der die Kostenfunktion tangiert. Vom Tangentialpunkt aus fällt man das Lot auf die x-Achse und erhält die Ausbringungsmenge x, bei der das Minimum der Stückkosten erreicht ist.

Mathematische Ermittlung des Betriebsoptimums bei progressivem Kostenverlauf:

Unterstellt wird folgende progressive Kostenfunktion:

$$K = 20.000 + 30x^3$$

Die Stückkostenfunktion lautet dann:

$$k = \frac{K}{x} = \frac{20.000}{x} + 30x^2$$

Die Funktion der Grenzkosten (1. Ableitung der Kostenfunktion) lautet:

$$K' = 90x^2$$

Da die Steigung des tangierenden Fahrstrahls sowohl den Stückkosten wie auch der Steigung der Kostenfunktion im Tangentialpunkt entspricht, müssen am Betriebsoptimum Stückkosten und Grenzkosten gleich sein:

$$K' = k$$

$$90x^2 = \frac{20.000}{x} + 30x^2$$

$$60x^3 = 20.000$$

$$x^3 = 333{,}33$$

$$x = \sqrt[3]{333{,}33}$$

$$x = 6{,}933589$$

Das Betriebsoptimum liegt bei etwa 6,93 Outputeinheiten.

Formeln zur Break-Even-Analyse

$E = Erlös\ (Umsatz, Umsatzerlös)$

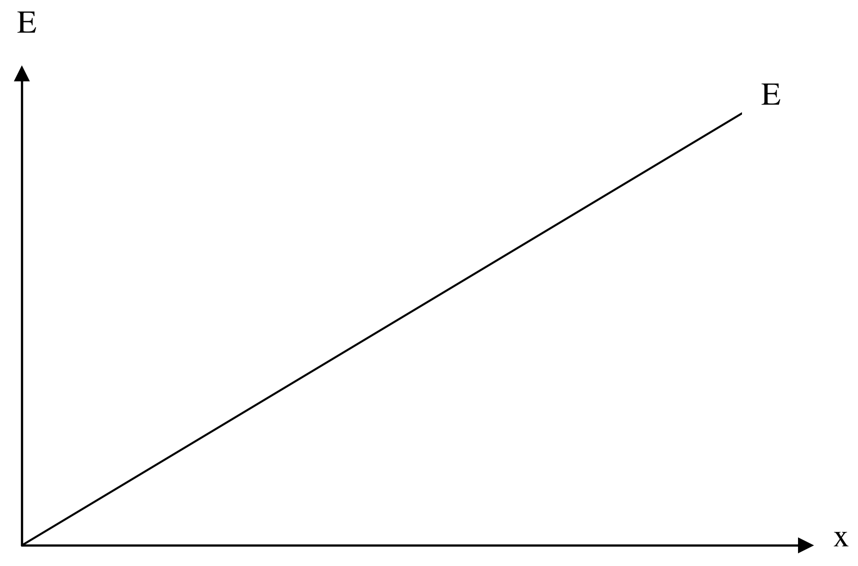
$p = \mathrm{Pr}eis$

$G = Gewinn$

Der Erlös ergibt sich aus dem Produkt von Preis und verkaufter Menge:

$$E = p * x$$

Ist der Preis p unabhängig von der verkauften Menge konstant, so ergibt sich eine lineare Erlösfunktion:



Sind Erlös und verkaufte Menge bekannt, so lässt sich hieraus der Preis ermitteln:

$$p = \frac{E}{x}$$

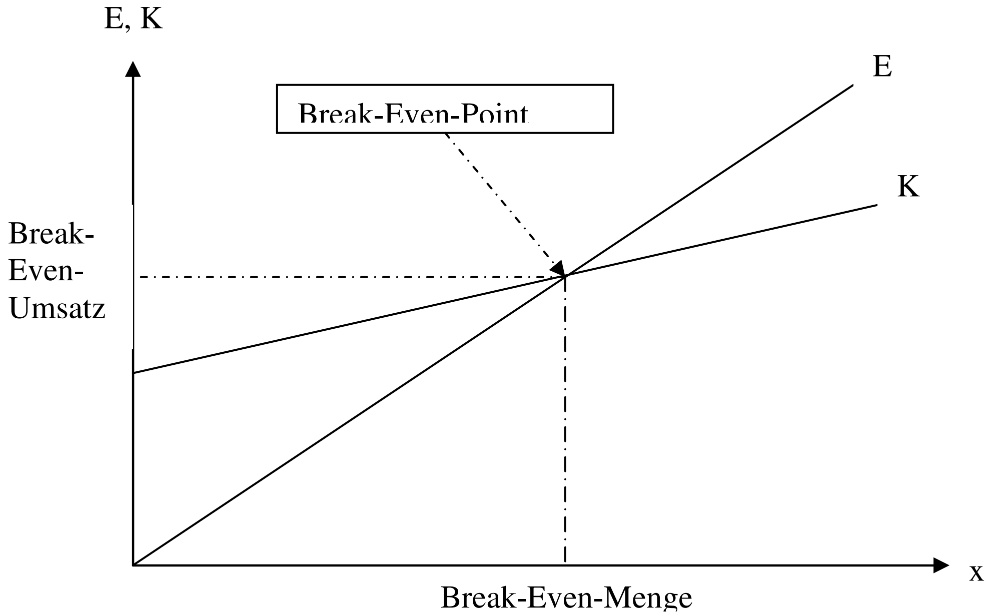
Der Break-Even-Point liegt bei der Outputmenge, bei der Erlös und Kosten gleich sind. Mathematisch gilt also am Break-Even-Point:

$$E = K$$

Es lässt sich nun E durch p * x und K durch die Kostenfunktion ersetzen. Man erhält dann:

$$p * x = K_f + k_v * x$$

Grafische Darstellung:



Mithilfe dieser Gleichung lässt sich nun die Break-Even-Menge ermitteln.

Beispiel: Ein Produkt wird zu 5 € verkauft, die Fixkosten betragen 6.000 € und die variablen Stückkosten 2 €.

$$5x = 6.000 + 2x$$
$$3x = 6.000$$
$$x = 2.000$$

Um den Break-Even-Umsatz zu ermitteln, setzt man die Break-Even-Menge in die Erlösfunktion ein:

$$E = p * x = 5 * 2.000 = 10.000$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man natürlich auch, wenn man die Break-Even-Menge in die Kostenfunktion einsetzt:

$$6.000 + 2 * 2.000 = 10.000$$

In diesem Beispiel liegt die Break-Even-Menge bei 2.000 Outputeinheiten. Bei geringeren Ausbringungsmengen sind die Kosten höher als die Erlöse, bei größeren Ausbringungsmengen übersteigen die Erlöse die Kosten und der Betrieb kommt in die Gewinnzone. Der Break-Even-Umsatz beträgt 10.000 €.

Wenn am Break-Even-Point gilt

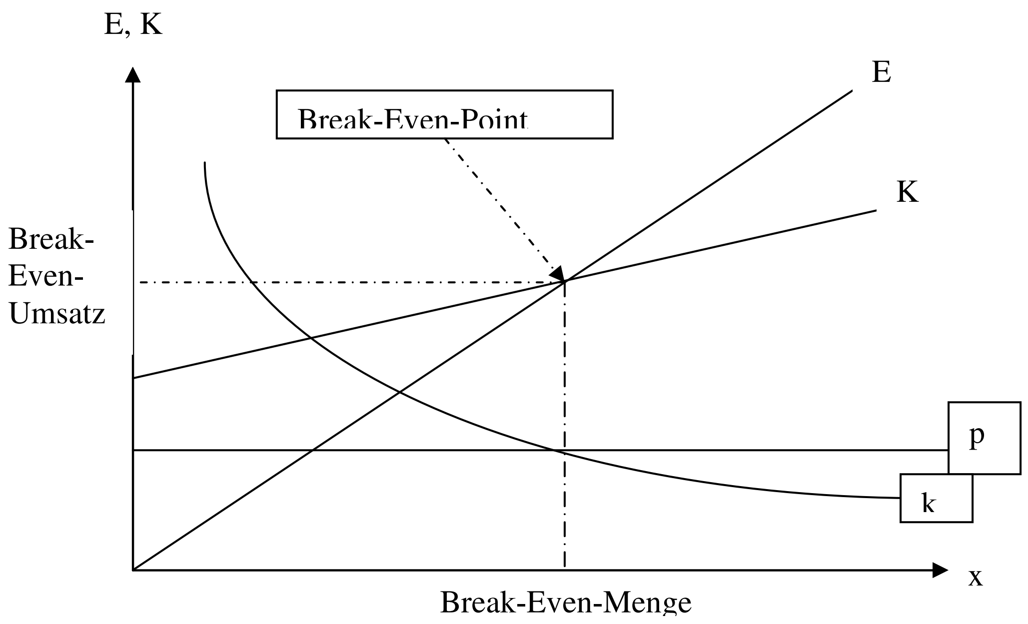
$$E = K$$

dann gilt auch:

$$\frac{E}{x} = \frac{K}{x}$$
$$\frac{E}{x} = p$$
$$\frac{K}{x} = k$$
$$also:$$
$$p = k$$

Am Break-Even-Point sind also die Stückkosten gleich dem Preis, die Funktion der Stückkosten schneidet also am Break-Even-Point die Preisfunktion.

Grafisch dargestellt:



Ein Anbieter mit linearem Kosten- und Erlösverlauf erreicht sein Gewinnmaximum an der Kapazitätsgrenze, da dort die Differenz zwischen Erlösen und Kosten am größten ist.

Der Gewinn ist definiert als Differenz zwischen Erlösen und Kosten:

$$G = E - K$$

oder:

$$G = p * x - (K_f + k_v * x)$$

Aufwand und Kosten

UE = Unternehmensergebnis

BE = Betriebsergebnis

AK = Anschaffungskosten

WBK = Wiederbeschaffungskosten

ND = Nutzungsdauer

AV = Anlagevermögen

UV = Umlaufvermögen

UE = Ertrag – Aufwand

BE = Leistung – Kosten

  Umsatzerlös
+ Bestandsmehrung
- Bestandsminderung
+ Eigenleistung

= Leistung

Aufwand = neutraler Aufwand + ordentlicher Aufwand

  betriebsfremder Aufwand
+ periodenfremder Aufwand
+ außerordentlicher Aufwand

= neutraler Aufwand

Aufwand – neutraler Aufwand = ordentlicher Aufwand

ordentlicher Aufwand = Zweckaufwand = Grundkosten

Grundkosten + Zusatzkosten = Gesamtkosten

  kalkulatorische Abschreibungen
+ kalkulatorische Zinsen
+ kalkulatorische Wagnisse
+ kalkulatorischer Unternehmerlohn
+ kalkulatorische Miete

= Kalkulatorische Kosten

Ermittlung der kalkulatorischen Abschreibungen:

$$kalk.Abschreibung = \frac{WBK}{tatsächliche\,ND}$$

Ermittlung der kalkulatorischen Zinsen bei Anlagen ohne Schrottwert:

$$kalk.Zinsen = \frac{AK}{2} * \frac{Kalk.Zinssatz}{100}$$

oder:

$$kalk.Zinsen = \frac{WBK}{2} * \frac{Kalk.Zinssatz}{100}$$

Ermittlung der kalkulatorischen Zinsen bei Anlagen mit Schrottwert:

$$kalk.Zinsen = \frac{AK(WBK) + Schrottwert}{2} * \frac{Kalk.Zinssatz}{100}$$

Ermittlung des Betriebsnotwendigen Kapitals:

	Betriebsnotwendiges nicht abnutzbares AV
+	Betriebsnotwendiges abnutzbares AV
=	Betriebsnotwendiges AV
+	Betriebsnotwendiges UV (Durchschnittswerte)
=	Betriebsnotwendiges Vermögen
-	Abzugskapital
=	Betriebsnotwendiges kapital

Deckungsbeitragsrechnung

DB = Gesamtdeckungsbeitrag

db = Stückdeckungsbeitrag

Der Gesamtdeckungsbeitrag ist die Differenz zwischen Erlösen und variablen Kosten:

$$DB = E - K_v$$

Der Stückdeckungsbeitrag ist die Differenz zwischen Preis und variablen Stückkosten:

$$dp = p - k_v$$

Der Gesamtdeckungsbeitrag lässt sich auch ermitteln, indem man den Stückdeckungsbeitrag mit der verkauften Menge multipliziert:

$$DB = db * x$$

Im Rahmen der Deckungsbeitragsrechnung erfolgt die Ermittlung des Betriebsergebnisses nach folgendem Schema:

  Erlöse
\- K_v

= DB
\- K_f

= BE

Plankostenrechnung

$BPB = Basisplanbeschäftigung$

$Istb = Istbeschäftigung$

$K_p = Plankosten$

$K_s = Sollkosten$

$K_I = Istkosten$

$PKVS = Plankostenverrechnungssatz$

$verrK_p = verrrechnete\,Plankosten$

$GA = Geamtabweichung$

$BA = Beschäftigungsabweichung$

$VA = Verbrauchsabweichung$

$PA = \Pr eisabweichung$

$MA = Mengenabweichung$

Die Sollkostenfunktion lautet:

$$K_s = K_f + k_v * x$$

Bei Basisplanbeschäftigung sind die Plankosten gleich den Sollkosten. Bei BPB gilt also:

$$K_p = K_s$$

Den Plankostenverrechnungssatz erhält man, indem man die Plankosten durch die Basisplanbeschäftigung dividiert:

$$PKVS = \frac{K_p}{BPB}$$

Die verrechneten Plankosten (bei Istbeschäftigung) ergeben sich durch Multiplikation des Plankostenverrechnungssatzes mit der Istbeschäftigung:

$$verrK_p = PKVS * Istb$$

Die Höhe der Sollkosten (bei Istbeschäftigung) ergibt sich, indem man in die Sollkostenfunktion für x die Istbeschäftigung einsetzt:

$$K_s = K_f + k_v * Istb$$

Die Beschäftigungsabweichung ist die Differenz zwischen verrechneten Plankosten und Sollkosten bei Istbeschäftigung:

$$BA = verrK_p - K_s$$

Die Verbrauchsabweichung ist die Differenz zwischen Sollkosten und Istkosten:

$$VA = K_s - K_I$$

Die Verbrauchabweichung lässt sich ebenso als Summe aus Mengen- und Preisabweichung bestimmen:

$$VA = MA + PA$$

Die Gesamtabweichung ist die Differenz zwischen verrechneten Plankosten und Istkosten:

$$GA = verrK_p - K_I$$

Die Gesamtabweichung lässt sich ebenso als Summe aus Beschäftigungs- und Verbrauchsabweichung bestimmen:

$$GA = BA + VA$$

  Istmenge bei Istbeschäftigung * Planpreis
- Istmenge bei Istbeschäftigung * Istpreis

= Preisabweichung

  Planmenge bei Istbeschäftigung * Planpreis
- Istmenge bei Istbeschäftigung * Planpreis

= Mengenabweichung